

Đề thi cuối kỳ học kỳ I năm học 2016 – 2017 môn Toán cao cấp A3
Thời gian: 90 phút. Sinh viên được dùng tài liệu

Câu 1: (4,0 điểm)

a. Đổi thứ tự lấy tích phân $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$, sau đó tính diện tích miền lấy tích phân.

b. Viết tích phân $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ trong hệ tọa độ Descartes, tọa độ trụ và tọa độ cầu, trong đó V là khối cầu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Tính thể tích miền V .

c. Tính tích phân đường $I = \int_C 2xy dx - x^2 dy$, trong đó C là nửa bên trái của đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ đi từ điểm $A(0, 3)$ đến điểm $B(0, -3)$.

Câu 2: (3,0 điểm)

Cho trường vectơ $\vec{F}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ và (S) là nửa mặt cầu $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$.

a. Tìm $\text{rot}\vec{F}(x, y, z)$, $\text{div}\vec{F}(x, y, z)$

b. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt (S).

c. Tính thông lượng của trường vectơ $\vec{F}(x, y, z)$ qua phía trên của mặt (S).

Câu 3: (3,0 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a. $(y \sin x - x^2 + 1) dx + (2y - \cos x - 2) dy = 0$

b. $y'' + y' = x^2 + \cos x$

Câu	Đáp án	Thang điểm
1a (1đ)	Đổi thứ tự: $I = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^y f(x, y) dx$	0,5đ
	Tính diện tích: $S = \int_0^1 (y - 1 + \sqrt{1 - y^2}) dy = \left(\frac{y^2}{2} - y + \frac{1}{2} \arcsin y + \frac{y}{2} \sqrt{1 - y^2} \right) \Big _0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	0,5đ
1b (1,5đ)	Descartes: $K = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$	0,5đ
	Trụ: $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \cdot f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz$	0,25đ
	Cầu: $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho$	0,25 đ
	Thể tích: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$	0,5đ
1c (1,5đ)	Đặt $I_1 = \int_{BA} 2xydx - x^2 dy$ với $\begin{cases} AB: x = 0 \Rightarrow dx = 0 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow I_1 = 0$	0,5đ
	$I + I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 9, x \leq 0}^{Green} -4x dx dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^3 -4r^2 dr = 72$	0,75đ
	$\Rightarrow I = 72 - I_1 = 72$	0,25đ
2a (1đ)	$\overrightarrow{rot F} = (R'_y - Q'_z) \vec{i} + (P'_z - R'_x) \vec{j} + (Q'_x - P'_y) \vec{k} = -2yz \vec{i} - 2xz \vec{j} - 2xy \vec{k}$	0,5đ
	$div \vec{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = x^2 + y^2 + z^2$ Diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 4$	0,5đ
2b (1đ)	$S = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{2} dx dy$	0,5đ
	$S = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4\sqrt{2}\pi$	0,5đ

<p>2c (1đ)</p>	<p>Thông lượng: $W = \iint_S xy^2 dydz + yz^2 dx dz + zx^2 dx dy = \iint_{S \cup S_1} \dots - \iint_{S_1} \dots$</p> <p>với $(S_1): z = 0$ định hướng xuống dưới.</p> $\iint_{S_1} xy^2 dydz + yz^2 dx dz + zx^2 dx dy = 0$	<p>0,5đ</p>
	<p>Ta có:</p> $\iint_{S \cup S_1} xy^2 dydz + yz^2 dx dz + zx^2 dx dy \stackrel{Gauss}{=} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ $= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4 d\rho = \frac{256\sqrt{2}\pi}{5}$ $W = \frac{256\sqrt{2}\pi}{5} - 0 = \frac{256\sqrt{2}\pi}{5}.$	<p>0,5đ</p>
<p>3a (1,5đ)</p>	<p>Đặt $P = y \sin x - x^2 + 1; Q = 2y - \cos x - 2$</p> <p>Vì $P_y = Q_x = \sin x$ nên phương trình là phương trình vi phân toàn phần.</p>	<p>0,5đ</p>
	$\begin{cases} u_x = P = y \sin x - x^2 + 1 \\ u_y = Q = 2y - \cos x - 2 \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = -y \cos x - \frac{1}{3}x^3 + x + y^2 - 2y$	<p>0,75đ</p>
	<p>Nghiệm của pt là: $-y \cos x - \frac{1}{3}x^3 + x + y^2 - 2y = C$</p>	<p>0,25đ</p>
<p>3b (1,5đ)</p>	<p>Pt đặc trưng: $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0; k = -1$</p> <p>Nghiệm tổng quát pt $y'' + y' = 0$ là $Y = C_1 + C_2 e^{-x}$</p> <p>Nghiệm riêng pt $y'' + y' = x^2$ có dạng: $y_{r1} = x(Ax^2 + Bx + C)$</p> <p>Suy ra $y_{r1} = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$</p> <p>Nghiệm riêng pt $y'' + y' = \cos x$ có dạng: $y_{r2} = D \cos x + E \sin x$</p> <p>Suy ra $y_{r2} = -\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$</p> <p>Nghiệm tổng quát pt ban đầu là</p> $y = Y + y_{r1} + y_{r2} = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$	<p>0,5đ</p> <p>0,75đ</p> <p>0,25đ</p>